

Kurzfassung

In seiner berühmten Publikation “A Mathematical Theory of Communication” im Jahre 1948 beschreibt Shannon die äusserste Grenze von zuverlässiger Kommunikation — die so genannte *Kanalkapazität* — und leitet einen generellen Ausdruck dieser Grenze her als Funktion der bedingten Wahrscheinlichkeit, mit der der Kommunikationskanal beschrieben wird. Unglücklicherweise enthält dieser Ausdruck eine Optimierung, die für die meisten interessanten Kommunikationskanäle nur sehr schwierig — wenn nicht gar unmöglich — ist, analytisch oder numerisch auszuwerten. Deshalb existiert ein grosses Interesse an guten oberen und unteren Schranken zur Kanalkapazität.

In dieser Arbeit wird eine neue Technik vorgeschlagen, die zur Herleitung von oberen Schranken zur Kanalkapazität dient. Sie basiert auf einem dualen Ausdruck der Kanalkapazität, in dem die Maximierung der Information über Eingangswahrscheinlichkeitsverteilungen durch eine Minimierung der relativen Entropie über Ausgangswahrscheinlichkeitsverteilungen ersetzt wird. Jede beliebige Wahl einer Ausgangswahrscheinlichkeitsverteilung führt somit zu einer oberen Schranke zur Kanalkapazität. Dabei muss die gewählte Ausgangswahrscheinlichkeitsverteilung nicht einer echten Ausgangswahrscheinlichkeitsverteilung entsprechen, die durch eine Eingangswahrscheinlichkeitsverteilung am Kanal induziert worden ist. Mit einer geeigneten Wahl von Ausgangswahrscheinlichkeitsverteilungen können oft gute obere Schranken hergeleitet werden.

Weiter wird eine neue Technik eingeführt, die zur asymptotischen Analyse der Kanalkapazität von kostenbeschränkten Kanälen dient. Sie basiert auf der Beobachtung, dass — unter schwachen Bedingungen an den Kanal — jede Eingangswahrscheinlichkeitsverteilung, deren Informa-

tionsrate bei zunehmender Lockerung der oberen Limitierung der Kosten asymptotisch gleich schnell wächst wie die Kanalkapazität, *gegen unendlich streben* muss. Dies bedeutet, dass bei einer solchen Eingangswahrscheinlichkeitsverteilung die Wahrscheinlichkeit aller Eingangssymbole mit endlichen Kosten gegen Null tendiert, wenn die obere Begrenzung der Kosten gegen unendlich geht.

Diese neuen Techniken werden bei verschiedenen Kanälen angewandt. In einem ersten Teil wird die Kanalkapazität von drei Kanalmodellen untersucht, die optische Kommunikationssysteme beschreiben: der optische Freiraumintensitätskanal, ein optischer Intensitätskanal mit signalabhängigem Rauschen und der Poisson-Kanal. In allen drei Kanälen werden sowohl die durchschnittliche Energie als auch die Maximalenergie der Eingangssymbole limitiert, wobei deren Verhältnis — das Durchschnitts- zu-Maximalenergie-Verhältnis $\alpha \in (0, 1]$ — konstant gehalten wird. Im Falle des optischen Freiraumintensitätskanals werden neue nicht-asymptotische obere und untere Schranken hergeleitet, die im Grenzwert von unlimitierter Durchschnitts- und Maximalenergie (wobei α konstant bleibt) zusammenfallen. In den anderen beiden Fällen werden neue nicht-asymptotische untere Schranken sowie asymptotische obere Schranken hergeleitet. Wiederum fallen diese Schranken im Grenzwert von unlimitierter zugelassener Durchschnitts- und Maximalenergie zusammen. Das bedeutet, dass asymptotisch die Kanalkapazität aller drei Kanalmodelle bekannt ist.

In einem zweiten Teil dieser Arbeit werden obige Techniken angewandt, um die Kanalkapazität von gedächtnisbehafteten Mehrfachantennenschwundkanälen zu untersuchen. Dabei wird angenommen, dass der Schwundprozess *regulär* ist (d.h., dass er eine endliche Entropierate hat) und dass die Realisierung des Schwundprozesses beim Sender vollständig unbekannt und beim Empfänger höchstens teilweise bekannt ist. Es wird gezeigt, dass bei hohem Signalrauschverhältnis die Kanalkapazität solcher Kanäle nur doppelt-logarithmisch mit dem Signalrauschverhältnis wächst. Um dieses Phänomen besser zu verstehen und eine Abschätzung zu erhalten, bei welchen Informationsraten es auftritt, wird die *Schwundzahl* eingeführt. Sie ist definiert als zweiter Term der asymptotischen Reihenentwicklung der Kanalkapazität bei hohem Signalrauschverhältnis. Die Schwundzahl stellt eine obere Grenze von Informationsraten dar, die in der Praxis erreichbar sind: Bei Informationsraten, die signifikant höher liegen als die Schwundzahl, wird die Kommunikation extrem energieineffizient.

In einem nächsten Schritt werden für verschiedene Schwundkanäle obere und untere Schranken zur Schwundzahl angegeben. Im Falle von allgemeinen gedächtnisbehafteten Schwundkanälen mit einer Antenne beim Sender und mehreren Antennen beim Empfänger fallen die obere und untere Schranke zusammen, d.h., die Schwundzahl ist exakt bekannt. Im Falle von Schwundkanälen ohne Gedächtnis und mit mehreren Antennen beim Sender sowie nur einer Antenne beim Empfänger, kann die Schwundzahl ebenfalls präzise hergeleitet werden: Es wird gezeigt, dass sie durch Strahlausrichtung erreicht wird, wobei die Richtung des Strahls nur vom Wahrscheinlichkeitsgesetz des Kanals abhängt und im Allgemeinen nicht mit der Richtung zusammenfällt, die das Signalrauschverhältnis maximiert. Basierend auf einem neuen geschlossenen Ausdruck für den Erwartungswert des Logarithmus einer nichtzentralen χ^2 -Verteilung werden einige geschlossene Ausdrücke für die Schwundzahl von Schwundkanälen mit Gauss'schem Schwundprozess angegeben. So wird unter anderem die Schwundzahl von Kanälen mit je einer Antenne am Sender und Empfänger und mit einem stationären, ergodischen, zirkulär-symmetrischen Gauss'schen Schwundprozess hergeleitet, und es wird gezeigt, dass sie bestimmt wird durch den Mittelwert und die Varianz des Schwundprozesses sowie dem mittleren quadratischen Fehler bei der Vorhersage der aktuellen Realisierung des Schwundprozesses basierend auf der Vergangenheit. Die Schwundzahl hängt nicht direkt mit der Dopplerspreizung zusammen.

Schliesslich wird gezeigt, dass im Falle von regulären gedächtnisbehafteten Mehrfachantennenschwundkanälen alle Schranken, die in dieser Arbeit hergeleitet worden sind, ihre Gültigkeit behalten, auch wenn zusätzlich eine rauschfreie Rückkopplungsverbindung vom Empfänger zum Sender existiert. Ausserdem wird bewiesen, dass eine solche rauschfreie Rückkopplung *keinen* Einfluss auf die Schwundzahl eines Schwundkanals mit je einer Antenne am Sender und Empfänger hat. Weiter wird gezeigt, dass die Schwundzahl regulärer gedächtnisbehafteter Einfachantennenschwundkanäle, bei welchen der Empfänger zusätzlich partielle Kenntnis über den Schwundprozess hat, durch rauschfreie Rückkopplung sowie durch Bekanntgabe der partiellen Kenntnis über den Schwundprozess am Sender ebenfalls nicht beeinflusst wird.

Im Falle von nichtregulären (d.h., mit einer negativ unendlichen Entropierate) Gauss'schen Schwundkanälen mit Gedächtnis wird bewiesen, dass eine Rückkopplung den *Vorfaktor des Logarithmus* (d.h., das Verhältnis von Kanalkapazität zum Logarithmus des Signalrauschver-

hältnisses bei hohem Signalrauschverhältnis) nicht beeinflusst.

Stichworte: Dualität, gegen unendlich strebende Eingangswahrscheinlichkeitsverteilungen, hohes Signalrauschverhältnis, Kanalkapazität, Mehrfachantennensysteme, nicht-koherente Dekodierung, nichtzentrale χ^2 -Verteilung, optische Intensitätskanäle, partielle Zusatzinformation beim Empfänger, partielle Zusatzinformation beim Sender, Poisson-Kanal, Rayleigh-Schwundprozesse, reguläre und nichtreguläre Schwundprozesse, Rice-Schwundprozesse, Rückkopplung, Schwundkanäle mit flachem Spektrum, Schwundzahl, Vorfaktor des Logarithmus.